

Mamasidikov Baxodir Qobuljon o'g'li
Andijon mashinasozlik instituti "Intellectual boshqaruv va kompyuter tizimlari
fakulteti" Axborot texnologiya kafedrasida stajyor o'qituvchisi
G-mail. bahodirmamasidikov6@gmail.com

ALABALARDA KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALARNING INTEGRALI VA UNI HISOBLASH USULLARINI SHAKLLANTIRISH.

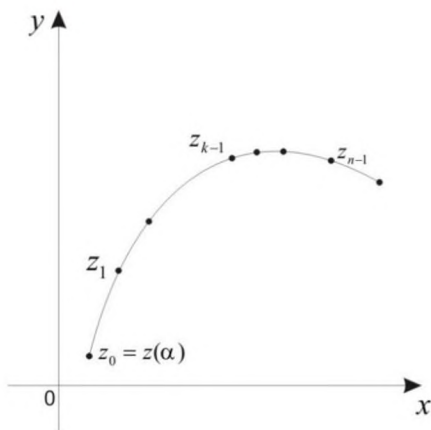
Anontatsiya: Kompleks o'zgaruvchili funksiya va uning integrali, Koshi's integral formulalari va shunga doir misollar.

Kalit so'zlar: Ta'rif, teorema, isbot, keltirilgan, Koshi teoremlari, Koshi formulalari keltirilgan.

Annotation: Complex variable function and its integral, Koshi's integral formulas and related examples.

Key words: Definition, theorem, proof, given, Koshi's theorems, Koshi's formulas.

Kompleks (z) tekislikdagi E sohada uzluksiz bir qiymatli $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (1.1) funksiya berilgan bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiya E dan olingan ixtiyoriy $\tilde{A}$ silliq chiziqda ham bir qiymatli bo'ladi. $\tilde{A}$ chiziqning teglamasi $z = z(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) bo'lib, $z_0 = z(\alpha)$ boshlang'ich, $z = z(\beta)$ oxirgi nuqtasi bo'lsin. $\tilde{A}$ dagi t ning o'sishiga mos yo'nalish musbat, t ning qiymatiga mos yo'nalish manfiy yo'nalish deb qabul qilinadi ya'ni $\tilde{\Gamma}$.



Agar egri chiziq chekli sondagi silliq chiziqlardan tashkil topgan bo'lsa, uni bo'laklari silliq chiziq deyiladi.

Γ silliq $z_0, z_1, z_2, \dots, z_n = z$ (1.2) nuqtalar orqali ixtiyoriy n ta yoychalarga bo'lamiz (12-chizma) va shu yoychalardan har birini istalgan joyidan bittadan nuqta olib, bu nuqtalarni mos ravishda $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots, \xi_n$ (1.3) deb belgilaymiz

Ushbu yig'indini tuzamiz:
 $s_n = f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \dots + f(\xi_k)\Delta z_k + \dots + f(\xi_n)\Delta z_n =$

$= \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k$ (1.4) integral yig'indiga integral yig'indi deyiladi. Bunda

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1} \quad k = \overline{0, n}$$

Agar biz (1.2) nuqtalarni ketma-ket to'g'ri chiziqlar bilan tutashtirsak, Γ egri chiziq ichiga chizilgan siniq chiziq hosil bo'ladi. Mana shu siniq chiziqlarning ya'ni vatarlarning eng kattasi δ nolga intilganda n cheksizlikka intiladi.

Ta'rif. Agar $\delta \rightarrow 0$ da (1.4) integral yig'indi $z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ va $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ nuqtalar Γ chiziqning qaysi joylaridan olinganiga bog'liq bo'lmay, aniq bir chekli limitga intilsa, shu limit $f(z)$ funksiya Γ chiziq bo'ylab olingan integral deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k \quad (1.5).$$

Γ chiziq integrallash yo'li yoki konturi deyiladi.

Ba'zan (1.5) integralni (1.1) ga asoslanib:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} (u+iv)(dx+idy) = \int_{\Gamma} udx - vdy + i \int_{\Gamma} vdx + idy \quad (1.6)$$
 ko'rinishda yozish qulay. (1.6)
 tenglikning o'ng tomoni haqiqiy argumentli funksiyalardan olingan egri chiziqli integrallardan iborat.

1-misol. (1.6) formuladan va II tur egri chiziqli integralni yechish qoidasidan foydalanib $\int_{\Gamma} |z|\bar{z}dz$ integralni hisoblang, bunda Γ chiziq soat strelkasiga teskari yo'nalgan $|z|=1$ aylananing yuqori yarmi.

Yechish: $|z|=1$ aylananing parametrik tenglamasi $x = \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \pi$ va $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1; dx = -\sin t dt, dy = \cos t dt$ larni hisobga olsak:

$$\int_{\Gamma} |z| \cdot \bar{z} dz = \int_0^{\pi} (-\cos t \sin t + \sin t \cos t) dt + i \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \pi i.$$

A gar $f(z)$ funksiya bir bog'lamli E sohada analitik bo'lsa, $z_1, z_2 \in E$ nuqtalar uchun $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1) = F(z) \Big|_{z_1}^{z_2}$ (2.2) N'yuton-Leybnits formula o'rinli bo'ladi, bunda $F(z)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasidir, ya'ni $F'(z) = f(z)$.

Haqiqiy matematik analizdagi kabi, agar $f(z)$ va $\varphi(z)$ funksiyalar bir bog'lamli E sohada analitik funksiyalar bo'lib, $z_1, z_2 \in E$ nuqtalar uchun

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = [f(z)\varphi(z)] \Big|_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} \varphi(z)f'(z)dz \quad (2.3)$$
 bo'laklab integrallash formulasi o'rinlidir.

2-misol. $\int_{\Gamma} (z\bar{z} + z^2)dz$ integralni $\Gamma: |z|=1$ aylananing yuqori yarmi bo'yicha hisoblang.

Yechish. $|z|=1, \alpha=0, \beta=\pi, z=x+iy, \bar{z}=x-iy, z=e^{i\varphi}, \bar{z}=e^{-i\varphi}, z \cdot \bar{z} + z^2 = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\varphi} + e^{2i\varphi}, dz = ie^{i\varphi} d\varphi.$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (z\bar{z} + z^2)dz &= i \int_0^{\pi} (1 + e^{2i\varphi})e^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{\pi} (1 + e^{2i\varphi})e^{i\varphi} d(i\varphi) = (e^{i\varphi} + \frac{1}{3}e^{3i\varphi}) \Big|_0^{\pi} = e^{i\pi} - 1 + \frac{1}{3}e^{3i\pi} - \frac{1}{3} = \\ &= -1 - 1 + \frac{1}{3}(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Analitik funksiyalar

Ta'rif. Agar $w = f(z)$ funksiya E sohaning z_0 nuqtasida va uning atrofida ham differensiallanuvchi bo'lsa, u shu nuqtada analitik deyiladi.
 Demak, funksiya biror nuqtada monogen bo'lishidan, uning shu nuqtada analitik bo'lishi kelib chiqmaydi.

Ta'rif. Agar $f(z)$ funksiya E sohaning barcha nuqtalarida hosilaga ega bo'lsa, u funksiya E da **analitik** deyiladi.

Ta’rif. $f(z)$ funksiya analitik bo‘lgan nuqtalar uning to‘g‘ri nuqtasi, analitik bo‘lmagan nuqtalar esa maxsus nuqtalar deyiladi.

16-misol $w = x^2 + y^2 + ixy^3$ funksiyaning analitik yoki analitik emasligini tekshirilsin.

Yechish: $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = x y^3$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = y^3$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 3xy^2$,

$$2x = 3xy^2 \Rightarrow x(2 - 3y^2) = 0 \Rightarrow x = 0, y = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y^3 = -2y \Rightarrow y(y^2 + 2) = 0 \Rightarrow y = 0$$

Demak, faqat (0;0) dagina hosila mavjud, boshqa nuqtada hosila yo‘q, ya’ni funksiya analitik emas, 0(0;0) – monogen nuqta.

Koshining integral formulalari

1. Koshi teoremlari.

1-teorema. Agar bir bog‘lamli E sohada $f(z)$ analitik bo‘lsa, E da yotuvchi har qanday Γ yopiq kontur bo‘yicha $f(z)$ funksiyadan olingan integral nolga teng bo‘ladi ya’ni $\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$

Eslatma. Bundan buyon $\oint$ belgi yopiq kontur bo‘yicha olingan integralni bildiradi.

2-teorema. Agar ko‘p bog‘lamli E sohada $f(z)$ analitik bo‘lsa, shu sohaning butun konturi bo‘ylab musbat yo‘nalishida $f(z)$ funksiyadan olingan integral nolga teng bo‘ladi, ya’ni $\oint_{\Gamma_0} - \oint_{\Gamma_1} - \oint_{\Gamma_2} = 0$ yoki $\oint_{\Gamma_0} = \oint_{\Gamma_1} + \oint_{\Gamma_2}$.

Natija. Integrallash sohasi ko‘p bog‘lamli bo‘lsa, analitik funksiyadan tashqi kontur bo‘yicha olingan integral ichki konturlar bo‘yicha olingan integrallar yig‘indisiga teng (konturlar hammasi soat strelkasiga teskari yo‘nalishda).

2. Koshi formulalari.

Yopiq E sohada analitik $f(z)$ funksiya berilgan bo‘lsin, sohaning konturini Γ deylik. Funksiyaning konturdagi qiymatlari bo‘yicha kontur ichidagi qiymatlarini aniqlash mumkin. Bu $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi$ (3.1) ko‘rinishdagi **Koshi formulasiga** asosan topiladi.

(3.1) tenglik misollar yechishda quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} d\xi = 2\pi i f(z_0) \quad (3.2)$$

Misol. $\int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z^2 + 2z} = \int_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z(z+2)} = \int_{|z|=1} \frac{\frac{e^z}{z+2}}{z-0} dz = 2\pi i \cdot f(z_0) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i.$

$$f(z) = \frac{e^z}{z+2} \Rightarrow f(0) = \frac{e^0}{0+2} = \frac{1}{2}, \text{ bunda } z_0 = 0$$

Javob: πi .

Agar kompleks o'zgaruvchi Z ning bir qiyimatli $f(z)$ funksiyasi E sonning hamma nuqtasida birinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya bu sohada istalgan yuqori tartibli hosilaga ega bo'ladi.

Koshi formulasi uchun esa: $f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$ (3.3) formula o'rinli.

(3.3) ni misol yechishda qulay bo'lishi uchun quyidagicha yozib olamiz:

$$\int_{\Gamma} \frac{f(\xi)d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (3.4)$$

Misol:
$$\int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(z_0) = -\pi i.$$

$z_0 = 0, f(z) = \cos z, f'(z) = -\sin z, f''(z) = -\cos z, f''(0) = -1$. Javob: $-\pi i$

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. Claudio Canuto, Anita Tabacco. Mathematical Analysis I. Springer-Verlag Italia, Milan - 2008.
2. Ю.Ф. Сенчук. Математический анализ для инженеров. 1, 2 часть-Харков: НТУ «ХПИ», -2003. -408 с.
3. Axmedov A.B., Shodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., Shamsiyev D.N.: Oliy matematikadan individual topshiriqlar. 1-qism, O'quv qo'llanma. Toshkent. O'zbekiston ensiklopediyasi. -2014.
4. Axmedov A.B., Shodmonov G., Esonov E.E., Abdukarimov A.A., Shamsiyev D.N.: Oliy matematikadan individual topshiriqlar. 2-qism, O'quv qo'llanma. Toshkent, "Sano standart" - 2018.
5. Y. Soatov Oliy matematika. 1,2,3-jild. T.: "O'qituvchi", 1992/1994/1996.
6. Juraev.T.J., Xudoyberganov.R.X., Mansurov.X. Oliy matematika asoslari. 1 va 2 qism. Darslik. O'zbekiston. 1995/1999.
7. Берман.Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. Ўқув қўлланма" Санкт-Петербург, Профессия. -2001.
8. Xurramov.Sh.R. Oliy matematika misol va masalalar, nazorat topshiriqlari. 1.2.3-qismlar. Toshkent: Tafakkur, -2018.
9. Danko.P.E. va boshqalar. Oliy matematika misol va masalalarda. Darslik. Toshkent. -2007.

Isayev Bohodirjon Maxamatshoyevich

E-mail: canada-uz@yandex.ru

Andijon, O'zbekiston

tel: +99(893) 4448602,

OLIIY TA'LIM O'QITISH JARAYONIDA ZAMONAVIY KENGAYTIRILGAN VA VIRTUAL HAQIQIY VOSITALARIDAN FOYDALANISH USULLARI

МЕТОДЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СОВРЕМЕННЫХ СРЕДСТВ ДОПОЛНЕННОЙ И ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ В ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЯХ